МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 531.39; 531.13

ДМИТРОЧЕ́НКО Олег Николаевич

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2003

Работа выполнена на кафедре прикладной механики
Брянского государственного технического университета

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, профессор **Погорелов Д. Ю.**
Официальные оппоненты:	Доктор физико-математических наук, профессор **Голубев Ю. Ф.** Кандидат технических наук, начальник сектора НПО Молния **Бойков В. Г.**
Ведущая организация:	Московский энергетический институт, кафедра теоретической механики

Защита состоится 20 февраля 2004 года в 16 часов 00 минут на заседании специализированного совета Д.501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119899, ГСП, Москва, Воробьёвы горы, Главное здание МГУ, сектор «А», аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 20 января 2004 года.

Учёный секретарь специализированного
совета Д.501.001.22
к.ф.-м.н., доц. Прошкин В. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Методы формирования уравнений движения абсолютно твёрдых тел и их систем рассматривались с самого появления механики и поэтому хорошо разработаны. Развитие же моделирования динамики систем деформируемых тел в середине XX века было вызвано зарождением и прогрессом вычислительной техники и началось с задач с малыми деформациями и при отсутствии больших движений тел как твёрдых. В последние десятилетия усилия многих исследователей направлены на решение задач, совмещающих произвольное пространственное движение упругих конструкций и их большие относительные деформации, а также соединение абсолютно твёрдых и упругих тел в единые системы. Анализ сложных систем становится невозможным без использования эффективных численных методов, ориентированных на вычислительную технику. Поэтому совершенствование методов моделирования систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел с учётом возможности их произвольного пространственного движения, больших относительных деформаций и большой размерности систем является актуальной задачей.

Цель работы: разработка эффективных методов и алгоритмов моделирования динамики систем абсолютно твёрдых и упругих тел с учётом возможности их произвольного пространственного движения, геометрической нелинейности и большой размерности.

Общая методика исследований. При разработке алгоритмов формирования уравнений движения используются методы динамики систем тел. Уравнения движения получаются в виде дифференциальных (ОДУ) либо дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Активно используется векторная и матричная алгебра. При формировании элементов уравнений движения деформируемых тел используется теория метода конечных элементов (МКЭ), методы теории механики сплошных сред (балок, пластин), дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, дифференциальное и интегральное исчисление.

Достоверность полученных результатов. Результаты и выводы, полученные в диссертационной работе, научно обоснованы. Достоверность результатов моделирования подтверждается их сопоставлением с известными аналитическими и численными решениями, а также проведенными экспериментальными исследованиями.

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

- Получил развитие современный формализм абсолютных узловых координат, сохраняющий постоянство основных членов уравнений движения деформируемых тел в геометрически нелинейной постановке. Новизна состоит в трактовке формализма как обобщения узловых переменных и полей перемещений традиционно используемых конечных элементов.
- На основе указанного обобщения построено новое семейство конечных элементов балок и пластин, которые могут совершать произвольное пространственное движение и иметь большие деформации. Для этих элементов получены аналитические выражения для членов их уравнений движения и матриц Якоби от них.
- Для системы связанных деформируемого и абсолютно твёрдого тел построены дифференциально-алгебраические уравнения движения в плоскости и пространстве с использованием абсолютных узловых координат.
- Предложен приём исключения алгебраических уравнений связей из уравнений движения системы абсолютно твёрдого и деформируемого тел. Это производится на основе использования абсолютных узловых координат деформируемого тела в качестве обобщённых координат для абсолютно твёрдого тела. В итоге уравнения движения указанного объекта описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений.
- На основе существующего формализма, использующего конечные углы поворота и приводящего к сильно нелинейным уравнениям движения, разработаны новые конечные элементы тонких балок и пластин, которые не приводят к неоднозначностям и вырождениям, описанным в литературе. Эти элементы также используются для сравнения с результатами моделирования, полученных методом абсолютных координат.

Практическая значимость работы и её внедрение.

- Полученные результаты и методы могут быть использованы для эффективного численного моделирования различных прикладных динамических задач, связанных с большими перемещениями и/или деформациями упругих конструкций, состоящих из балок и пластин, например, лопастей вертолёта, тросовых систем, лент конвейеров, а также систем связанных деформируемых и абсолютно твёрдых тел.

- Разработанные методы и алгоритмы реализованы в виде программного обеспечения в составе программного комплекса «Универсальный механизм» для моделирования динамики систем тел.

Апробация работы и публикации. Основные результаты настоящей работы докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- семинар кафедры теоретической механики МГУ под руководством академика РАН, профессора В. В. Белецкого и профессора Ю. Ф. Голубева; семинар под руководством академиков РАН, профессоров В. В. Румянцева и Д. Е. Охоцимского; семинар на факультете ВМиК МГУ под руководством профессора С. К. Коровина, 8-11 декабря 2003 г.;

- Международный конгресс «Механика и трибология транспортных систем», Ростов-на-Дону, 10-13 сентября 2003 г. [1];

- 19-я конференция Американского общества инженеров-механиков по механическим колебаниям и шуму, Чикаго, 2 – 6 сентября 2003 г., докладчик – соавтор, профессор Ван-Сок Ю (Wan-Suk Yoo), Южная Корея [2];

- семинары в Пусанском национальном университете, г. Пусан, Южная Корея, под руководством профессора Ван-Сок Ю, октябрь-ноябрь 2002 г.;

- летняя научная школа НАТО (NATO ASI) по виртуальным нелинейным системам тел, Прага, 23 июня – 3 июля 2002 г. [4];

- VIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23 – 29 августа 2001 г. [6];

- Международная межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и магистрантов, Гомель, 15 – 17 мая 2001 г.;

- Международная конференция стран СНГ «Молодые учёные – науке, технологиям и профессиональному образованию для устойчивого развития», Москва, 29 ноября – 3 декабря 1999 г.;

- научные семинары и секции внутривузовских конференций на кафедре прикладной механики БГТУ, 1998-2003 гг. [5, 7, 8].

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках грантов 98-01-00782-а, 99-01-00223-а, 02-01-00364-а, 02-01-06098-мас, 03-01-06487-мас, а также научной программы “Университеты России – Фундаментальные исследования” (гранты УР.015.04.01.09, УР.04.01.046).

По теме диссертации имеется 8 основных публикаций, среди них 4 научных статьи.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа включает введение, три главы, заключение, список литературы из 83 наименований, а также приложения. Работа содержит 60 рисунков и 11 таблиц. Общий объём диссертации – 125 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы основные цели и задачи исследования, научная новизна и практическая ценность работы, приведено краткое описание её содержания.

В первой главе приведен обзор методов и алгоритмов численного моделирования систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел. В ***параграфе 1.1*** подразумевается, что уравнения движения отдельных тел известны, а формированию подлежат уравнения движения системы. Из всего разнообразия методов формирования уравнений движения рассматриваются методы, ориентированные на вычислительную технику, развитие которой началось в 1950-х годах. Отмечается вклад в развитие вычислительной механики таких учёных, как Хукер и Маргулис (1965 г.), Роберсон и Виттенбург (1967 г.), Вукобратович (1970 г.), а также современных исследователей Шилена, Кройцера, Погорелова.

Кратко рассматриваются уравнения Лагранжа 2-го рода и указывается, что их использование для численного моделирования неэффективно, так как приводит к необходимости применения дифференцирования и к громоздким промежуточным выкладкам. В п. 1.1.3 рассматривается прямой метод формирования уравнений движения, в котором число алгебраических операций для получения уравнений движения системы в виде цепочки из n тел равно $O(n^3)$. В п. 1.1.4 приводится идея метода составных тел (composite body method), в котором указанная трудоёмкость снижается до $O(n^2)$. Наконец, в п. 1.1.5 описывается метод отдельных тел (articulated body method – А.Ф. Верещагин 1974 г., Айхбергер 1993 г.) линейной сложности $O(n)$ для цепочки тел. Приводятся примеры моделирования n-звенного маятника с использованием описанных методов с помощью программного комплекса «Универсальный механизм» (УМ/UM).

В ***параграфе 1.2*** описываются различные методы построения уравнений движения отдельного (деформируемого) тела. Отмечается, что одним из самых первых способов представления упругих тел был метод *твёрдотельных элементов*, п. 1.2.1. В нём инерционные и упругие свойства деформируемого тела распределяются между элементами – абсолютно твёрдыми телами – и введёнными между ними шарнирами с упруго-диссипативными силами. Данный подход позволяет использовать имеющиеся методы и алгоритмы моделирования систем абсолютно твёрдых тел с целью исследования динамики деформируемых систем. Среди исследований отмечаются работы Крушевского, Малиновского, Шилена, а также более современные работы Леонтьева, Паскаль и Гагариной, Кройцера и др. Указывается, что Погорелов (в соавторстве с соискателем [7, 8]) одним из первых применил этот подход для моделирования *пластин*, рис. 1. В итоге делается вывод, что твёрдотельная модель неплохо описывает статику деформируемого тела, а для успешного решения задач динамики необходима дальнейшая разработка алгоритмов моделирования деформируемых тел.

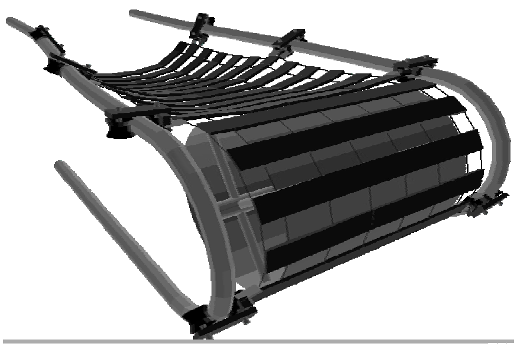

Рис. 1. Твёрдотельная модель ленты конвейера

Формализм подвижной системы координат позволяет учесть произвольное движение системы отсчёта, связанной с упругим телом. Этот подход довольно распространён из-за простоты реализации: он использует только дополнительные степени свободы, определяющие движение подвижной системы координат как твёрдого тела (обычно 6), в дополнение к узловым переменным, используемым в МКЭ. Одной из первых в этой области является работа Ликинса 1967 г. Матрица масс, обобщённые силы инерции и даже тяжести в этом методе получаются сильно нелинейными. Кроме того, относительные перемещения точек упругого тела по-прежнему предполагаются малыми.

Использование *конечных углов поворота* (п. 1.2.2) в качестве узловых координат позволяет решить проблему больших перемещений. Идея данного подхода изначально была изложена в работе Симо 1985 г. Были предложены реализации балочных и пластинчатых элементов, допускающих большие перемещения. Однако существующие реализации данного подхода при применении к тонким балкам и пластинам (то есть без учёта сдвиговой деформации), приводят к избыточности координат и вырождениям. Реализация метода, предложенная автором в п. 1.2.2, свободна от этих недостатков. Пример моделирования ленты конвейера приведен на рис. 2.

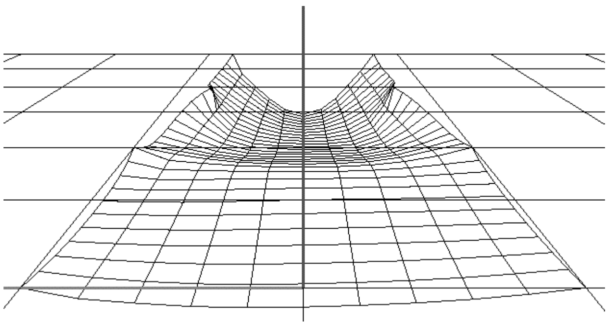

Рис. 2. Конечноэлементная модель ленты

Описанные подходы отличаются сильной нелинейностью членов, входящих в уравнения движения, из-за использования локальной системы отсчёта, связанной с телом. С этой точки зрения интересен *формализм абсолютных узловых координат*, описываемый в п. 1.2.3 и развиваемый далее в главе 2. В этом подходе интерполяционные функции форм, описывающие деформируемое состояние тела, вводятся в глобальной системе координат. В результате уравнения движения содержат постоянную матрицу масс и не содержат сил инерции. Единственным нелинейным членом уравнений, хотя и достаточно громоздким, является вектор обобщённых упругих сил. Основоположником этого метода является Ахмед Шаба́на (1996 г.). Им и его учениками и коллегами этот подход был реализован для плоских и пространственных балочных элементов, а также для элемента пластины. Вклад соискателя в развитие этого формализма составляет основу данной диссертации.

Вторая глава посвящена новым методам моделирования деформируемых тел, разработанным в ходе работы над диссертацией на основе формализма абсолютных узловых координат. В ***параграфе 2.1*** предлагается новый взгляд на природу этого формализма и указывается, что он является обобщением узловых переменных и полей перемещений конечных элементов, традиционно используемых в линейном МКЭ. Так, пусть для плоского балочного элемента деформированное состояние задаётся функцией $y(x)$, рис. 3а.

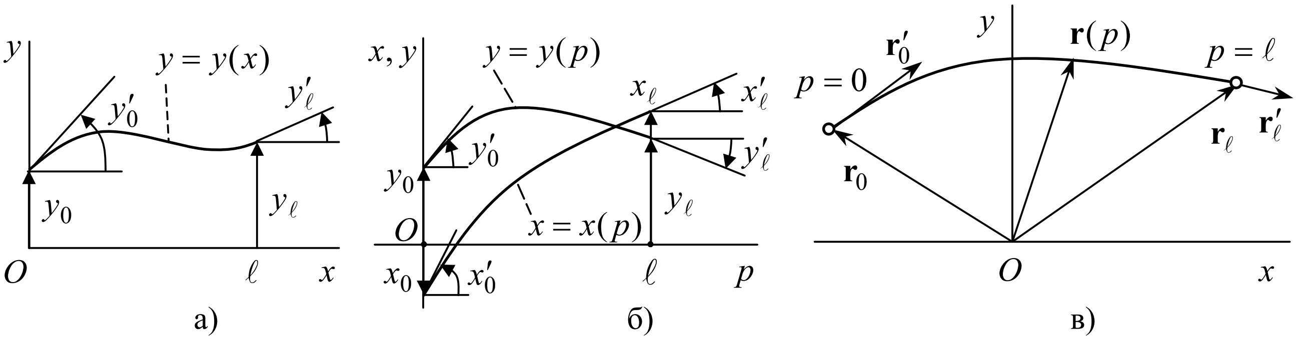

Рис. 3. Переход от элемента балки с малыми перемещениями (а) к абсолютным узловым координатам (в) с использованием параметризации осевой линии (б)

Введём две функции $x(p)$ и $y(p)$, где p – дуговая координата вдоль осевой линии, рис. 3б. В результате для балочного элемента получим следующее выражение для радиус-вектора $\mathbf{r}$ осевой линии (рис. 3в):

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\,\mathbf{q}\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{S}$ – матрица функций форм: $\mathbf{S}(p) = [s_1\mathbf{I}\ \ s_2\mathbf{I}\ \ s_3\mathbf{I}\ \ s_4\mathbf{I}]$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Матрица $\mathbf{S}$ содержит функции Эрмита

$$\begin{aligned} s_1(p,\ell) &= 1-3\xi^2+2\xi^3, & s_3(p,\ell) &= 3\xi^2-2\xi^3, \\ s_2(p,\ell) &= \ell\,(\xi-2\xi^2+\xi^3), & s_4(p,\ell) &= \ell\,(\xi^3-\xi^2), \end{aligned} \qquad \xi = \frac{p}{\ell}. \qquad (2)$$

Составляющие вектора координат $\mathbf{q} = \{\mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{r}_0'^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{r}_\ell^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{r}_\ell'^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$ показаны на рис. 3в.

Компоненты вектора $\mathbf{q}$ не обязаны быть малыми. А. Шабана показал, что элемент, построенный на поле перемещений (1), может представлять произвольные деформации, а также произвольные движения балки как твёрдого тела.

Однако формальный процесс перехода от стандартного элемента (а) к элементу (в) в данной работе описан впервые. На этой основе было предложено целое семейство новых элементов.

В ***параграфе 2.2*** описан процесс получения уравнений движения балочного элемента на основе уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{q}},$$

где T – кинетическая энергия элемента, Π – потенциальная энергия деформации и виртуальная работа δW сил тяжести $\mu\mathbf{g}$, где μ – плотность материала,

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\ell \mu \dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{r}}\, \mathrm{d}p, \quad \delta W = \int_0^\ell \delta \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mu\, \mathbf{g}\, \mathrm{d}p, \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^\ell EA\varepsilon^2\, \mathrm{d}p + \frac{1}{2}\int_0^\ell EJ\kappa^2 \mathrm{d}p.$$

Наиболее сложным является выражение для энергии деформации. Оно содержит продольную деформацию $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{r}'^{\mathrm{T}}\mathbf{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^{\mathrm{T}}\mathbf{r}' - 1)$ и кривизну осевой линии $\kappa = \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| \big/ \|\mathbf{r}'\|^3$, где $\mathbf{r}' = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}p$, $\mathbf{r}'' = \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}p^2$.

С использованием определения (1) радиус-вектора, его производной $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{S}\,\dot{\mathbf{q}}$ и вариации $\delta\mathbf{r} = \mathbf{S}\,\delta\mathbf{q}$ уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^g, \tag{3}$$

куда входят постоянные матрица масс и столбец обобщённых сил тяжести:

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}}\, \partial \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}} = \mu \int_0^\ell \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\, \mathrm{d}p = \mathbf{const}, \qquad \mathbf{Q}^g = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{q}} = \int_0^\ell \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}p\, \mu\, \mathbf{g} = \mathbf{const}.$$

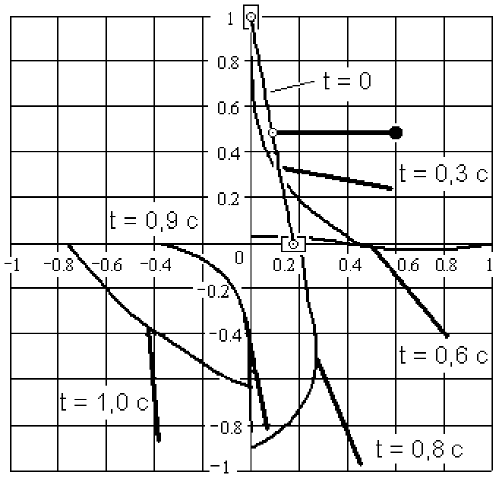

Рис. 4. Пример моделирования гибкой линейки эллипсографа с маятником

Отметим, что столбец обобщённых сил инерции отсутствует, хотя рассматривается случай больших перемещений и деформаций.

Элементы вектора обобщённых упругих сил $\mathbf{Q}^e = \partial\Pi/\partial\mathbf{q}$ являются наиболее громоздкими из-за сложности выражения для Π. Тем не менее, многими авторами (в том числе и соискателем [2]) были предложены различные способы вычисления обобщённых сил. Все они имеют вид $\mathbf{Q}^e = \mathbf{K}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}$ с матрицей жёсткости $\mathbf{K}$. Кроме того, вычисляются матрицы Якоби этих сил $\mathbf{C} = \partial\mathbf{Q}^e/\partial\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \partial^2\Pi/\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$, необходимые для численного интегрирования жёстких уравнений движения. В ***параграфе 2.3*** приводятся примеры тестовых задач (рис. 4) с целью сравнения данного элемента с существующими на основе других формализмов и показывается его эффективность.

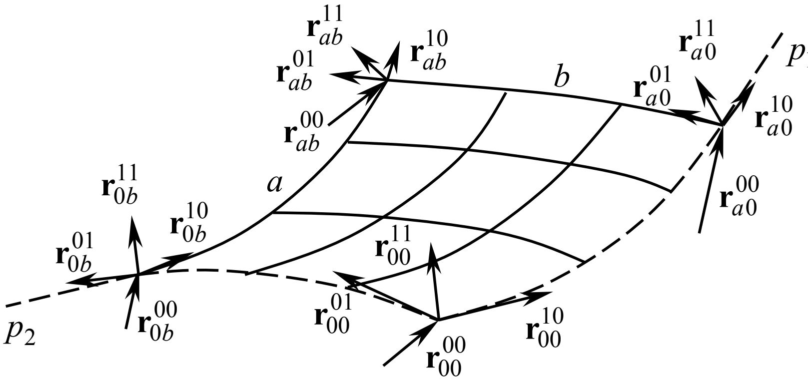

Рис. 5. Узловые векторы конечного элемента пластины

В ***параграфе 2.4*** на основе обобщения, описанного выше, предлагается новый элемент пластины с 48-ю степенями свободы (рис. 5) на базе стандартного эрмитова элемента. Вектор его обобщённых координат имеет вид

$$\mathbf{q} = \left\{ \mathbf{r}_{00}^{00}\ \mathbf{r}_{00}^{01}\ \mathbf{r}_{0b}^{00}\ \mathbf{r}_{0b}^{01}\quad \mathbf{r}_{00}^{10}\ \mathbf{r}_{00}^{11}\ \mathbf{r}_{0b}^{10}\ \mathbf{r}_{0b}^{11}\quad \mathbf{r}_{a0}^{00}\ \mathbf{r}_{a0}^{01}\ \mathbf{r}_{ab}^{00}\ \mathbf{r}_{ab}^{01}\quad \mathbf{r}_{a0}^{10}\ \mathbf{r}_{a0}^{11}\ \mathbf{r}_{ab}^{10}\ \mathbf{r}_{ab}^{11} \right\}^{\mathrm{T}},$$

куда входят величины $\mathbf{r}_{uv}^{ij} = \partial^{i+j}\mathbf{r}\big/\partial p_1^i\,\partial p_2^j\,\Big|_{p_1=u,\ p_2=v}$, являющиеся либо радиус-векторами углов пластины (при $i = j = 0$), либо касательными векторами (при $i + j = 1$), либо векторами вторых производных (при $i + j = 2$).

Матрица $\mathbf{S}$ из (1) для данного элемента имеет вид

$$\mathbf{S}(p_1, p_2) = \left[S_{11}\mathbf{I}\ \ S_{12}\mathbf{I}\ \ S_{13}\mathbf{I}\ \ S_{14}\mathbf{I};\ \ \ldots;\ \ \ldots;\ \ S_{41}\mathbf{I}\ \ S_{42}\mathbf{I}\ \ S_{43}\mathbf{I}\ \ S_{44}\mathbf{I}\right],$$

где набор функций форм S_{ij} является декартовым произведением балочных функций (2): $S_{ij}(p_1, p_2) = s_i(p_1, a)\, s_j(p_2, b)$.

Уравнения движения элемента имеют вид (3). Для вычисления обобщённых упругих сил используется следующее выражение для энергии деформации ортотропной пластины толщиной h (интегрирование по её поверхности):

$$\Pi = \frac{6}{h^2}\iint_P \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}\varepsilon_{ij}^2 + 2D_{22}^{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \right) \mathrm{d}P + \frac{1}{2}\iint_P \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}\kappa_{ij}^2 + 2D_{22}^{11}\kappa_{11}\kappa_{22} \right) \mathrm{d}P .$$

Сюда входят цилиндрические жёсткости D_{ij}, зависящие от упругих констант материала пластины, а также компоненты деформаций в срединной поверхности пластины $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_j - \delta_{ij})$ и её кривизны $\kappa_{ij} = \mathbf{r}_{ij}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\big/\|\mathbf{n}\|^3$. Обозначения: δ_{ij} – символы Кронекера, $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial p_i$, $\mathbf{r}_{ij} = \partial^2\mathbf{r}\big/\partial p_i \partial p_j$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ – вектор нормали.

Далее проводится тщательная работа по аналитическому вычислению обобщённых сил $\mathbf{Q}^e = \partial \Pi / \partial \mathbf{q}$ и их матриц Якоби с использование различных допущений и предположений. Разработаны модели сил различной сложности – от практически линейной до кубической по $\mathbf{q}$.

В ***параграфе 2.5*** приведены примеры моделирования статических и динамических задач с использованием разработанного элемента пластины, а также расчёт собственных частот и форм малых колебаний (рис. 6). Показано совпадение результатов с известными аналитическими и численными решениями.

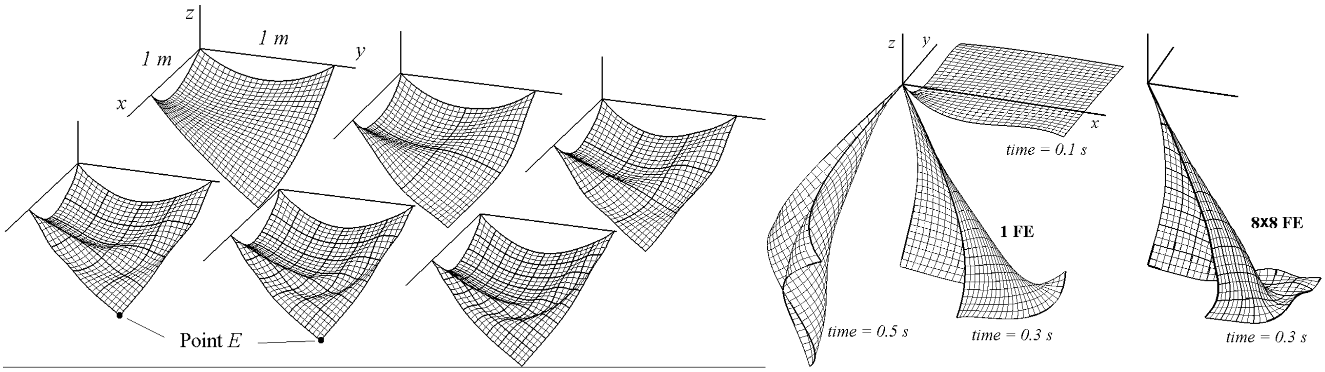

Рис. 6. Примеры моделирования пластин с большими перемещениями

В ***параграфе 2.6*** предлагаются другие типы конечных элементов балок и пластин на основе обобщения формализма абсолютных узловых координат.

В ***параграфе 2.7*** приведено резюме главы и указываются преимущества разработанных элементов по сравнению с существующими.

1. Прямоугольный конечный элемент пластины. Число степеней свободы – 48, как и в существующей реализации Ми́кколы и Шабаны, но за счёт использования вторых производных новый элемент обеспечивает непрерывность нормалей к поверхности при соединении нескольких элементов.

2. Прямоугольный элемент пластины с исключёнными вторыми производными. По функциональности он соответствует упомянутому элементу Микколы и Шабаны, однако имеет меньшее число степеней свободы – 36.

3. Треугольный элемент пластины, не имеющий аналогов в формализме абсолютных узловых координат. Имеет 27 степеней свободы и позволяет моделировать пластины с произвольным контуром.

4. Элемент тонкой балки в пространстве. Имеет 14 степеней свободы, в отличие от элемента толстой балки Шабаны и Яку́ба с 24-ю степенями свободы.

Третья глава посвящена сравнению результатов экспериментов над образцами консольной балки и пластины (рис. 7), совершающими колебания большой амплитуды, с результатами, полученными в ходе численных экспериментов с использованием разработанных алгоритмов. Эти исследования были проведены в октябре-ноябре 2002 г. в Пусанском национальном университете, г. Пусан, Южная Корея.

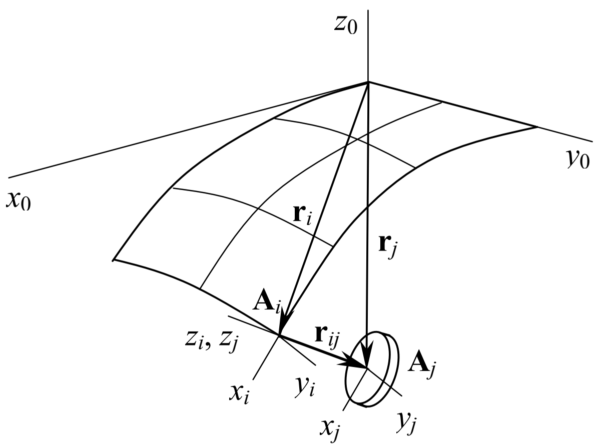

Рис. 7. Присоединение тела к пластине

Коллектив лаборатории Computer-Aided Engineering (CAE) Lab под руководством профессора Ван-Сок Ю (Wan-Suk Yoo) обеспечивал экспериментальную часть исследований; автор обеспечивал расчётную часть. Результаты находятся в удовлетворительном соответствии друг с другом, рис. 8.

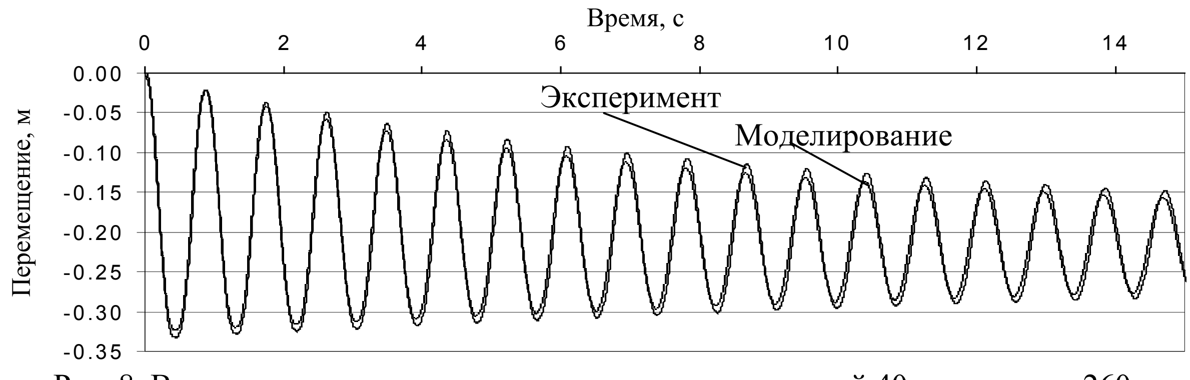

Рис. 8. Вертикальное перемещение конца пластины длиной 40 см с грузом 260 г

К теоретическим результатам этой главы относится разработанный метод исключения алгебраических уравнений связей при моделировании системы «балка+груз» и «пластина+груз» путём использования в качестве обобщённых координат для твёрдого тела абсолютных узловых координат.

При присоединении твёрдого тела к балочному элементу (рис. 9) необходимо добавить следующее уравнение связи:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\tau_Y / \tau_X\right).$$

Здесь φ – угол поворота тела, τ_X и τ_Y – компоненты касательного вектора к балке, которые входят в число обобщённых координат. Чтобы исключить это

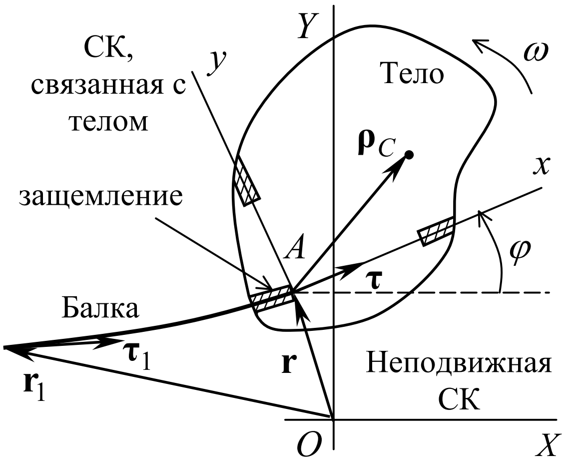

Рис. 9. Присоединение тела к балке

уравнение, для твёрдого тела используется следующий набор координат: $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$. Таким образом, для свободного тела введены четыре скалярные координаты, и необходимо вывести уравнения его движения.

Найдём угловую скорость тела $\omega(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, продифференцировав φ. Представим вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ произвольной точки $\boldsymbol{\rho}$ тела в виде $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})\,\dot{\mathbf{x}}$ и запишем общее уравнение динамики (интеграл по объёму V тела)

$$\int_V \delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mu(\mathbf{a} - \mathbf{g})\,\mathrm{d}V = 0,$$

где $\delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi}\,\delta\mathbf{x}$ – виртуальное перемещение и ускорение $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Phi}\,\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\Phi}}\,\dot{\mathbf{x}}$ точки $\boldsymbol{\rho}$, μ – плотность материала тела, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести. В итоге получим уравнения движения тела в матричном виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^{\text{ин}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}^{\text{тяж}}(\mathbf{x}).$$

Размер матрицы масс **M** равен 4 по числу компонентов вектора **x** и она является вырожденной, то есть моделировать свободное тело с помощью полученных уравнений невозможно. Однако при добавлении их к уравнениям движения балочного элемента эта вырожденность исчезает.

Подобный подход может быть реализован в случае тела и пластины в пространстве, и, вообще говоря, для произвольного способа присоединения тел, т.е. не только в случае неподвижного соединения.

В **заключении** диссертации приведена общая характеристика работы и сделаны основные выводы по полученным результатам.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Погорелову Дмитрию Юрьевичу за многолетнее руководство исследованиями, а также за ту научную, методическую и личную поддержку и тот объём знаний и советов, которые были переданы ученику от учителя.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дмитроченко О.Н., Погорелов Д.Ю.[1] Задачи с большими перемещениями и конечные элементы, сохраняющие постоянство матриц в формулировке абсолютных узловых координат // Сб. докл. Межд. конгр. «Механика и трибология транспортных систем-2003», т. 1. – Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов-на-Дону, 2003. – С. 299-305.
2. Yoo W.-S., Lee J.-H., Sohn J.-H., Park S.-J., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N.[2] Comparison of physical experiments and computer simulation with ANCF: Large deformation of a thin cantilever beam // 29th ASME Int. Design Engineering Techn. Conferences, Chicago, 2003, DETC2003/VIB-48307, 8 стр.[3]
3. Dmitrochenko O.N., Pogorelov D.Yu.[4] Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation // Multibody System Dynamics **10**(1), Spec. issue ‘Virtual Nonlinear Multibody Systems’, Kluwer, Dordrecht, 2003, 17-43.
4. Dmitrotchenko O.N. Efficient simulation of rigid-flexible multibody dynamics: some implementations and results // Proc. of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1, W. Schielen, M. Valášek (Eds.), Prague, 2002, 51-56.
5. Дмитроченко О.Н. Методы моделирования динамики гибридных систем тел с учётом геометрической нелинейности // Динамика, прочность и надёжность трансп. машин / Под ред. Б.Г. Кеглина. – Брянск: БГТУ. – 2001. – С. 24-34.
6. Дмитроченко О.Н. Компьютерное моделирование динамики нелинейных гибридных систем абсолютно твёрдых и упругих тел // VIII Всеросс. Съезд по теор. и прикл. мех. / Тез. докл. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 233 с.
7. Погорелов Д.Ю., Дмитроченко О.Н.[5] Моделирование геометрически нелинейных упругих систем на основе твёрдотельной расчётной схемы на примере конвейера с подвесной лентой // Вопросы транспортного машиностроения / Сб. тр. под ред. Г. С. Михальченко. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 94-99.
8. Дмитроченко О.Н., Михайлов Н.Н., Погорелов Д.Ю.[6] Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем твёрдотельными конечными элементами // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. научн. трудов под ред. В.И.Сакало. – Изд-во БГТУ, Брянск, 1998. – С. 33-39.

---

[1] Дмитроченко О.Н. принадлежат методы решения и результаты, Погорелову Д.Ю. – постановка задачи.

[2] Соавторам из Южной Кореи (Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H.) принадлежит постановка проблемы и экспериментальная часть исследований; Погорелову Д. Ю. принадлежит постановка части, касающейся численного моделирования, Дмитроченко О. Н. принадлежат все результаты, касающиеся методов и результатов численного моделирования.

[3] Статья опубликована в электронной форме и на компакт-дисках и доступна по коду VIB-48307.

[4] Дмитроченко О.Н. принадлежат методы решения и результаты, Погорелову Д.Ю. – постановка задачи.

[5] Погорелову Д.Ю. принадлежит постановка проблемы и методическая часть исследования; Дмитроченко О.Н. принадлежат прикладные результаты.

[6] Дмитроченко О.Н. принадлежит реализация методов, предложенных Погореловым Д.Ю.; Михайлову Н.Н. принадлежит экспериментальная часть работы.

ДМИТРОЧЕ́НКО Олег Николаевич

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ

ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Автореферат

Подписано в печать 19.12.2003.

Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,93 Уч.-изд. л. 0,93 Тираж 100 экз. Заказ 23

Брянский государственный технический университет

241035, г. Брянск, бульвар 50-летия Октября 7, тел. 55-90-49

Лаборатория оперативной полиграфии БГТУ, ул. Институтская, 16